文獻回顧報告：結合 GARCH 波動性的選擇權評價模型

陳釗而*

July 1, 2002

1 導論

Black-Scholes 選擇權評價模型中波動性 (volatility) 參數爲固定的設定與實際觀察到的現象衝突。市場交易者發現資產報酬率有波動聚集 (volatility clustering) 與 volatility smile[1] 的現象。另外, 資產報酬率分配也呈不對稱性, 此在文獻中被提及爲資產報酬率和波動性的負相關, 稱爲槓桿效果 (leverage effect)。忽略了這些重要的現象, 以傳統 Black-Scholes 評價模型及對應的隱含波動性所算出的避險率來進行避險操作將會導致嚴重損失, 例如 Dunbar (1999) 中指出 Long Term Capital Management 在1998年第三季的操作。在財務計量學中, generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) 模型被設計來解釋波動聚集現象; 透過進一步的參數設定更能解釋槓桿效果。Duan (1995) 將被廣泛使用的 GARCH 計量模型與選擇權評價方法作結合, 提出 GARCH 波動性下的選擇權評價模型以修正 Black-Scholes 模型低估低波動性證券所衍生選擇權價值的現象。然而在實際市場上操作, 結合 GARCH 波動性效果的選擇權評價模型是否直能評價、避險較 Black-Scholes 模型爲準確呢。Dumas,

*財金所, 學號 D90723008。

[1]將隱含波動性 (implied volatility) 置於 Y 軸, 選擇權執行價格置於 X 軸所畫出的圖形呈現 U 型。

Fleming and whaley (1998) 檢視在 S&P500指數選擇權市場中, 當改進的模型只能捕捉到波動相關性 (correlation) 而不能含蓋路徑相關性 (path-dependence) 時, 其樣本外的評價誤差大於僅由傳統 Black-Schole 模型的結果。因此設計不對稱性的 GARCH 評價模型 (e.g. NGARCH 模型) 以同時捕捉資產報酬波動的相關及波動中的路徑相關性時, 應可增進不對稱性 GARCH 評價模型在實証上的表現。Heston and Nandi (2000) 的實証結果也應証了不對稱性 GARCH 評價模型的在 S&P500指數選擇權上樣本外評價誤差表現遠優於 Black-Schole 模型的結果。以不對稱性 GARCH 族模型來捕捉資產報酬率波動聚集現象和槓桿效果, 將此設定納入選擇權評價方法後, 因此可獲得對波動性較敏感的選擇權的正確評價公式及相關避險率。

本文剩下的章節架構如下: 第二節介紹 GARCH 模型、augmented GARCH 及其極限性質。第三節介紹 GARCH 選擇權評價模型及文獻上提供評價公式數值解的方法。第四節介紹 Heston and Nandi (2000) 有分析解的特殊 GARCH 評價模型。最後一節介紹文獻中正在進行的有關計量方法與選擇權評價方法互相結合的文章, 也引以爲思考新研究題目的藉鏡。

2 GARCH 模型

考慮資產對數報酬時間序列 (扣除平均數後)r_t, 若r_t條件變異數爲 GARCH(p,q)過程, 其滿足

$$r_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t, \quad \epsilon_t \mid \Im_{t-1} \sim D(0,1) \tag{1}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}, \tag{2}$$

其中$\Im_t$爲t時點的訊息集合 (σ-field) 且D爲某分配。(2) 式即爲補捉條件波動聚集現象的參數式。此外, 隨機的波動性也可由 (2) 式藉由資產價格求出。不同 GARCH 族模型的差異只在於對 (2) 式作不同動態參數式的設定, 例如,non-linear asymmetric GARCH(1,1) (NGARCH) 模型:

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-1}(\epsilon_{t-1} - c)^2, \tag{3}$$

其中c可解釋爲風險溢酬 (risk premium) 並捕捉資產報酬率和波動性的負相關性。

文獻上有多種不對稱 GARCH 模型被提出, 何種模型是適合用於手邊要分析的標的資產呢。Duan (1997) 提出 augmented GARCH 模型, 其利用類似 Box-Cox 轉換, 將 (2) 式轉爲含蓋文獻中有被提及 GARCH 模型的一般式。以 augmented GARCH 模型作爲對立假設進行 LM specification 檢定後即可選取適當的模型。以 NYSE 指數爲例, Duan (1997) 進行檢定後所推薦的模型爲 NGARCH 模型。在同篇文章中, Duan利用 Duan (1996) 也証明 augmented GARCH 過程的 difussion limit 包含 bivariate difussion models, 例如 Hull and White (1987) 與 Heston(1993) 等所提出的模型。在選擇權評價上, Heston and Nandi (2000) 也利用 NGARCH 的變形解出有分析解的不對稱性 GARCH 選擇權評價模型。不同於連續時間的隨機波動模型, 間斷時間 GARCH 波動性模型在估計與應用在選擇權評價上較爲簡單。因爲在連續時間隨動波動模型的設計下, 波動性是無法觀察到的, 不同於 GARCH 模型下的 (2) 式。

3 GARCH 選擇權評價模型

在資產報酬率條件變異數爲 GARCH 過程下, Amin and Ng (1993) 指出傳統的風險中立評價法 (risk-neural valuation) 無法在 GARCH 選擇權評價模型上使用。Duan (1995) 在均衡架構下提出局部風險中立評價測度 (locally risk-neutral valuation relationship; LRNVR), 使 GARCH 評價模型可在 LRNVR 下操作。簡介如下。考慮間斷時間經濟體系, 讓S_t爲t時點的資產價格。在P測度下, 下式爲條件對數常態分配隨機變數:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \epsilon_t, \tag{4}$$

其中r爲無風險利率,λ爲風險溢酬, 另外假設

$$\epsilon_t \mid \Im_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad \text{under measure} P \tag{5}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}. \tag{6}$$

定價測度Q被稱爲 LRNVR 如果其滿足下列條件:

- 測度Q對測度P而言爲互相地絕對連續 (mutually absolutely continuous);
- $\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \Im_t$在測度$Q$下爲對數常態分配;

- $E^Q\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \Im_t\right] = e^r$;

- $Var^Q\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \Im_t\right] = Var^P\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \Im_t\right] \quad a.s.$ 對測度P。

Duan (1995) 定理2.1証明當代表性個人追求期望效用極大, 且效用函數具有時間可加性及分離性 (time additive and separable), 則在下列任一情況下,LRNVR 成立:

- 效用函數之相對風險趨避係數爲常數且對數總和消費的變化量在測度P下爲平均數及變異數皆爲常數之常態分配;

- 效用函數之絕對風險趨避係數爲常數且總和消費的變化量在測度P下爲平均數及變異數皆爲常數之常態分配;

- 效用函數爲線性。

在 LRNVR 及測度 Q 下,Duan (1995) 定理2.2証明

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2}h_t + \xi_t, \quad \xi_t \mid \Im_{t-1} \sim N(0, h_t), \tag{7}$$

且

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i(\xi_{t-i} - \lambda\sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j h_{t-j}. \tag{8}$$

因此在Q測度下, 風險溢酬λ影響到條件變異數過程。在 GARCH(p,q) 模型下, 執行價格爲X、到期日爲T, 在時間點t時的歐式買權價格爲

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r}E^Q\left[\max(S_T - X, 0) \mid \Im_t\right]. \tag{9}$$

因爲$\Im_t$是由$\{S_t, \epsilon_t, \ldots, \epsilon_{t-p+1}, h_t, \ldots, h_{t-q+1}\}$ 所生成的σ-field, 所以 GARCH 選擇權評價模型會與標的物價格和條件變異數有關, 又因條件變異數可由動態參數式及歷史價格求出, 所以 GARCH 選擇權評價公式會爲現在及過去資產價格的函數。這使得實際上操作時取得資料簡便, 但也因爲如此, 路徑相依的問題也讓 GARCH 評價模型在此無封閉解, 導致模擬求解時需進行大量運算, 甚至必順採用個種變異削減 (variance reduction) 的技術。採用二元數來計算 GARCH 選擇權評價模型, 也會遭遇兩個問題。第一, 因條件變異數會隨所在的狀態改變, 所以會有節點不重合的問題。另外, 在每一個節點, 由於該節點可能來自前一期的數個節點, 所以一個節點會存在數個不同的條件變異數, 隨所時間增加, 節點上必順儲存的條件變異數也會不斷增加, 造成計算上極大的負擔。因此,Ritchken and Trevor (1999) 提出三元樹來解決節點不重合的問題, 並採用最大最小變異數進行內插, 留下固定個數的條件變異數, 使得評價 GARCH 選擇權模型的數值方法快速很多。

在 GARCH 下的 delta 避險比率, 即選擇權對股價的一階微分, 其公式如下

$$\Delta_t^{GH} = e^{-r(T-t)} E^Q \left[\frac{S_T}{S_t} 1_{\{S_T \geq K\}} \mid \Im_t \right]. \tag{10}$$

由於 Put-Call Parity 的成立是利用複製投資組點的技巧証明, 因此在 GARCH 選擇權評價模型下,Put-Call Parity 亦成立。因此 GARCH 下的歐式賣權價格及避險比率即可透過 Put-Call Parity 導出。

我們將 GARCH 評價模型的一些特性歸納如下:

- 在 GARCH(1,1) 模型下, 訊息集合$\Im_t$由S_t與h_t生成。

- Black-Scholes 模型在風險中立評價測度下, 股票及選擇權價格均與風險溢酬無關; 但 GARCH 選擇權評價模型在 LRNVR 測度下, 風險溢酬會從條件變異數影響股票價格過程。

- LRNVR 要求前期的條件變異數經過測度轉換後保持不變, 因此在P測度下估計條件變異數並不違反理論。

- 在測度P下, 條件變異數與前期資產報酬無相關; 測度Q下, 如果風險溢酬爲正, 條件變異數與前期資產報酬會呈負相關。

4 有分析解的特殊GARCH 選擇權評價模型

Heston and Nandi (2000) 考慮以下模型:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda h_t - \frac{1}{2} h_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \mid \Im_{t-1} \sim N(0, h_t), \tag{11}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\epsilon_{t-i} - \gamma_i \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}, \tag{12}$$

其中α_i及γ_i分別捕捉分配的峰態及偏態。若考慮 GARCH(1,1) 模型設定, 我們可導出變異數過程h_t與資產報酬的相關性如下

$$\mathrm{Cov}_{t-1}[h_{t-1}, \ln S_t] = -2\alpha_1 \gamma_1 h_t. \tag{13}$$

在α_1及γ_1爲正數下, 此式表示資產報酬與變異數呈負相關, 即槓桿效果。透過 LRNVR 轉換後, 在測度Q下, 股價模型爲

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2}h_t + \xi_t, \quad \xi_t \mid \Im_{t-1} \sim N(0, h_t), \tag{14}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=2}^{p}\alpha_i(\xi_{t-i} - \gamma_i\sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j h_{t-j} + \alpha_1(\xi_{t-i} - \gamma_1^*\sqrt{h_{t-1}})^2, \tag{15}$$

其中

$$\xi_t = \epsilon_t + (\lambda + 1/2)\sqrt{h_t}, \tag{16}$$

$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + 1/2. \tag{17}$$

經由條件生成函數及許多數統技巧, 可得到在此特定模型下的歐式買權價格爲

$$\begin{aligned} C &= e^{-r(T-t)}E_t^*\left[\max(S_T - K, 0)\right] \\ &= \frac{1}{2}S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi+1)}{i\phi}\right]d\phi \\ &- Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi)}{i\phi}\right]d\phi\right), \end{aligned} \tag{18}$$

其中f^*爲風險中立過程(14) 及 (15) 式的生成函數,E^*風險中立下的期望值, Re代表函數的實部, 函數內部符號定義相當複雜, 請參閱 Heston and Nandi (2000)。此評價公式爲當期資產價格,S_t, 與條件變異數,h_t, 的函數。不同於連續時間隨機波動模型波動性無法直接觀察到,GARCH 模型的條件變異數h_t爲過去可觀察到資產價格路徑的函數, 所以評價公式爲皆可觀到的現在與過去資產價格的函數。

此分析解可對應 Black-Scholes 公式:

$$C_t = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{19}$$

按 (10) 式計算買權避險比率爲:

$$\Delta_t = \frac{1}{2} + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi S_t} \int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi+1)}{i\phi}\right] d\phi. \tag{20}$$

Black-Scholes模型下的 delta 避險比率爲$N(d_1)$。

有了 Heston and Nandi 選擇權評價模型後, 可依此做爲理論模型依據, 並與應用樹狀法所得的數値結果做爲比較以檢視樹狀法的收斂性。

5 計量經濟與選擇權評價方法的結合

由以上各節討論大致可看出, 利用財務計量中發展出來解釋資產波動現象的 GARCH 模型加入選擇權評價方法後, 就可解決 Black-Scholes 評價模型中因假設資產波動性爲常數所導致的評價與避險誤差。在計量經濟學中, 有許多模型包含經濟意含, 若能也和選擇權評價模型結合, 應也會產生相當的好處。Duan and Pliska (2001) 將共整合 (co-integration) 的計量經濟概念代入選擇權評價模型中。所謂的共整合是指在多個非定態 (non-stationary) 時間序列間存在一組或多組線性關性, 使得這些非定態的時間序列經此組線性組合後成爲定態時間序列。這在經濟上也隱含這些變數間存有長期均衡的關係。在財務文獻中最常被提到的是現貨價格與期貨價格間存在共整合的關係。若一資產組合中, 相互資產價格間存有共整合的關係, 或許應考慮能描述此共整合關係的計量模型加入對應的選擇權評價模式中。只要存在共整合關係就存在一誤差較正模型 (error-correction model), 透過此計量模型和選擇權評價方法即可評價考慮共整合關係後的選擇權價値, 這就是 Duan and Pliska (2001) 所嘗試提出的新概念。

狀態轉換模型 (regime switching model) 在研究總體景氣循環中運用相當普遍, 其允許在不同的狀態下, 有不同的動態行爲 (景氣繁榮與蕭條的經濟行爲不同)。在金融市場上, 我們可將高風險與低風險視爲兩種不同的狀態, 在高風險狀態, 資產的波動性對資產報酬的影響比在低風險狀態時來的大。若不同狀態下, 各有一組 GARCH 模型來解釋資產報酬的波動狀況, 則考慮具狀態轉換的 GARCH 選擇權評價模型, 將比單純考慮 GARCH 下的評價模型來的一般化。Duan, Popova and Ritchken (1999) 在此概念下提出結合狀態轉換的選擇權評價模型。他們推導出在此一般化的模型下, 其變異數的動態機制不像 GARCH 評價模型中只受資產價格的影響, 還包括其它可解釋因素的影響。這也使模型在捕捉資產變異數性質時可加具有彈性。

參考文獻

[1] Amin, K. and V. Ng (1993), "ARCH Processes and Option Valuation," working paper, University of Michigan.

[2] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385–407.

[3] Duan, J. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, **5**, 13–32.

[4] Duan, J. (1996), "A Unified Theory of Option Pricing under Stochastic Volatility- from GARCH to Diffusion," preprint.

[5] Duan, J. (1997), "Augmented GARCH(p,q) Process and its Diffusion Limit," *Journal of Econometrics*, **79**, 97–127.

[6] Duan, J., G. Gauthier, and J. Simonato (1999), "An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model," *Journal of Computational Finance*, **2**, 75–116.

[7] Duan, J., I. Popova and P. Ritchken (1999), "Option Pricing under Regime Switching," preprint.

[8] Duan, J. and S. Pliska (2001), "Option Valuation with Co-Integrated Asset Prices," preprint.

[9] Dumas, B., J. Fleming, and R. Whaley (1998), "Implied Volatility Functions: Empirical Tests," *Journal of Finance*, **53**, 2059–2116.

[10] Dunbar, N. (1999), "LTCM and Dangers of Marking to Market," *Risk*, **12**, 6–7.

[11] Heston, S.L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility, with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343.

[12] Heston, S.L. and S. Nandi (2000), "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *The Review of Financial Studies*, **13**, 585–625.

[13] Hull, J. and A. White (1986), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, **42**, 281–299.

[14] Ritchken, P. and R. Trevor (1999), "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance*, **54**, 377-402.